LEZIONE 1) 04/02/2021 FURLANETTO CARLO

CONSIDERO $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, VOGLIO DIMOSTRARE CHE

$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ NON ESISTE.

SUPPONGO PER ASSURDO $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \ell$

ALLORA PER OGNI INTORNO DI ℓ ESISTE UN

INTORNO DI 0 $I(0)$ I CUI PUNTI (ESCLUSO AL

PIÙ x_0) "PORTANO" f NELL'INTORNO DI ℓ.

PUNTI DEL TIPO $x = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, SI TROVANO IN OGNI

INTORNO DI 0, BASTA PRENDERE K ABBASTANZA

GRANDE. IN QUESTI PUNTI $\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \operatorname{sen} k\pi = 0$

PUNTI DEL TIPO $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$, SI TROVANO IN OGNI

INTORNO DI 0, BASTA PRENDERE K ABBASTANZA

GRANDE. IN QUESTI PUNTI $\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$

SE IL LIMITE ESISTE È UNICO, MA QUALSIASI VALORE ℓ SUPPONGA NON POTRÀ ESSERE VALIDO, PERCHÉ PER INTORNI ABBASTANZA PICCOLI DI ℓ ALMENO UNO TRA 0 E 1 SARÀ ESCLUSO, E IL RAGIONAMENTO PRECEDENTE IMPLICA CHE ESSI VENGONO RAGGIUNTI ALMENO UNA VOLTA (IN REALTÀ INFINITE) IN OGNI INTORNO DI 0.

DI CONSEGUENZA IL LIMITE CERCATO NON ESISTE.

IN GENERALE QUESTO CI ASSICURA CHE SE TROVIAMO DUE SOTTOINSIEMI FATTI DI ELEMENTI CON INTERSEZIONE NON VUOTA CON UN QUALSIASI INTORNO DI x_0 CHE PORTANO IL LIMITE A DUE VALORI DISTINTI, IL LIMITE NON ESISTE.

PROVARE IN MODO ANALOGO CHE

$$\lim_{x \to +\infty} \sin x \quad \text{NON ESISTE}$$

T. CONFRONTO

SIANO f, g E h TRE FUNZIONI TALI CHE

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ IN UN INTORNO $I(x_0)$

ESCLUSO AL PIÙ x_0

E SIA $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$

ALLORA $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

DIMOSTRO CHE $\dfrac{\text{"limitato"}}{\text{"infinito"}} \longrightarrow$ "infinitesimo"

SIA $f(x)$ limitata $\left(|f(x)| \leq \ell \in \mathbb{R} \right)$ E

$g(x)$ t.c. $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, ALLORA $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

DIM: $-\ell \leq f(x) \leq +\ell$, PER T. PERM. SEGNO ESISTE

INTORNO $I(x_0)$ IN CUI $g(x) > 0$ (ESCLUSO AL PIÙ x_0)

$$\forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \qquad -\frac{\ell}{g(x)} \le \frac{f(x)}{g(x)} \le +\frac{\ell}{g(x)}$$

VISTO CHE $\lim_{x \to x_0} -\frac{\ell}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\ell}{g(x)} = 0$ PER

TEO. CONFRONTO $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 0$.

IN MODO ANALOGO SI DIMOSTRA IL TEOREMA SE

$\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ o ∞.

APPLICATO A $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$

[NOTO CHE $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$ NON ESISTE, MA

$\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ ESISTE COMUNQUE. QUINDI

LIMITE DI UN RAPPORTO NON COINCIDE

SEMPRE CON RAPPORTO DEI LIMITI.

IN EFFETTI ANCHE LE ALTRE OPERAZIONI

HANNO LO STESSO PROBLEMA]

LIMITI NOTEVOLI DA RICORDARE

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad \forall a > 0, a \neq 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \forall a > 0, a \neq 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$$

INFINITESIMI

SIA $f : (I \subset \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ E SIA $P_0 \in DI$ (P_0 DI ACCUMULAZIONE PER I, P_0 PUÒ ESSERE ANCHE ∞, $+\infty$ O $-\infty$).

SE $\lim_{P \to P_0} f(x) = 0$ f SI DICE INFINITESIMA IN P_0

ESEMPI: $f(x) = \frac{1}{x}$ INFINITESIMO IN ∞

$f(x) = x^2$ " " 0

PROP. INFINITESIMI

1) f È UN INFINITESIMO IN P_0 SE È SOLO $|f|$ È UN INFINITESIMO IN P_0

2) SE $|g(x)| \leq |f(x)|$ $\forall P \in I(P_0) \setminus \{P_0\}$ ED f È INFINITESIMA IN P_0 ALLORA ANCHE g È INFINITESIMA IN P_0

DIM: ESSENDO $-|f(x)| \leq g(x) \leq |f(x)|$

E $\lim_{P \to P_0} |f(x)| = 0$ PER PROP. 1)

ALLORA PER TEO. CONFRONTO

$$\lim_{P \to P_0} g(x) = 0.$$

3) SE f E g SONO ENTRAMBE INFINITESIME IN P_0, ALLORA LA SOMMA $f+g$ È INFINITESIMA IN P_0

DIM: NEL CASO DI LIMITI FINITI IL LIMITE DELLA SOMMA COINCIDE CON LA SOMMA DEI LIMITI

$$\lim_{P \to P_0} f(x) = \lim_{P \to P_0} g(x) = 0$$

QUINDI $$\lim_{P \to P_0} f(x) + g(x) = \lim_{P \to P_0} f(x) + \lim_{P \to P_0} g(x) = 0 + 0 = 0$$

4) SE f È INFINITESIMA IN P_0 E g È UNA FUNZIONE LIMITATA IN UN INTORNO DI P_0, ALLORA IL PRODOTTO $f \cdot g$ È INFINITESIMO IN P_0

CONSEGUENZA DEL FATTO CHE $\dfrac{\text{"LIMITATO"}}{\text{"INFINITO"}} \to \text{"INFINITESIMO"}$

CONFRONTO FRA INFINITESIMI

DATI DUE INFINITESIMI SIMULTANEI IN P_0 f E g,

SI DICE CHE HANNO LO STESSO ORDINE

DI INFINITESIMO SE

$$\lim_{P \to P_0} \left| \frac{f(P)}{g(P)} \right| = L \neq 0 \, , \; L \in \mathbb{R}$$

$$f \overset{\circ}{=} g$$

SE INVECE $\displaystyle\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = 0$

SI DICE CHE f HA ORDINE DI

INFINITESIMO SUPERIORE A g $\quad f \overset{\circ}{>} g$

SE INVECE $\displaystyle\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \infty$

SI DICE CHE f HA ORDINE DI

INFINITESIMO INFERIORE A g $\quad f \overset{\circ}{<} g$

INFINE SE $\displaystyle\lim_{P \to P_0} \left| \frac{f}{g} \right|$ NON ESISTE, LE FUNZIONI

NON SONO CONFRONTABILI.