

4^a LEZIONE

04/03/2021

CORSO MATEMATICA

PROF. CARLO FURLANETTO

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + x + \tan^2 x}{\sqrt{x + \sin x + x^2 + \tan^2 x}}$$

(Note: Orange annotations above the numerator and denominator indicate terms of order x and x^2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + x}{x} = 1$$

(P.d.S.) = $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sin x + x)^2}{x} \cdot \sqrt{x} = 0$$

$$\ln x + x^2 \sim x^2 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + x^2}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} \right) = 1 \quad \textcircled{v}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \cdot \frac{1}{x^2} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\frac{1}{x + \cos x} \sim \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot (x + \cos x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

(Note: Green annotations above the fraction)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\cos x}{x} \right) = 1 \quad \textcircled{v}$$

N.B. NON SI È SUPPOSTO CHE f E g SIANO
INFINITESIMI IN P_0 . AD ESEMPIO $f(x) = 2 - x^2$
E $g(x) = 2 \cos x$ SONO ASINTOTICHE PER $x \rightarrow 0$
SENZA ESSERE INFINITESIME.

SE f E g SONO AS. E INFINITESIME IN P_0 , ALLORA
SONO INFINITESIMI DELLO STESSO ORDINE; NON
È VERO IL VICEVERSA.

AD ES. $2 \sin x$ E x SONO INFINITESIMI DELLO
STESSO ORDINE IN ZERO, MA NON SONO
ASINTOTICHE $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2$

VERIFICARE CHE:

$$\ln x \sim \cos x \quad (x \rightarrow 0^-) \quad \frac{1}{x} + x^2 \sim \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$\frac{1}{x} + x^2 \sim x^2 \quad (x \rightarrow +\infty) \quad \ln x + x^2 \sim x \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$\ln(2 \ln x + 2) \sim x \quad (x \rightarrow +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2 \cos x} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + x^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^3}{x} \cdot x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^3}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-x} (e^{2x} - 1)}{(e^x + e^{-x}) 2x} + \frac{x^2}{x} \right] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\cosh x + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + 2\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(e^x \left(\frac{1 - e^{-2x} + 4e^{-x}}{2}\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln(e^x)}{x} + \frac{\ln\left(\frac{1 - e^{-2x} + 4e^{-x}}{2}\right)}{x} \right] = 1$$

PROPRIETÀ

SE $f \sim g$ IN P_0 , ALLORA

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \cdot h(P) = \lim_{P \rightarrow P_0} g(P) \cdot h(P)$$

[SE ESISTE UNO ESISTE ANCHE L'ALTRO]

Dim: SUPPONGO ESISTA $\lim_{P \rightarrow P_0} (f \cdot h) = L_1 \in \mathbb{R}$

$$\text{ALLORA } \lim_{P \rightarrow P_0} (g \cdot h) = \lim_{P \rightarrow P_0} \left(\frac{g}{f} \cdot f \cdot h \right) = \lim_{P \rightarrow P_0} \left(\frac{g}{f} \right) \cdot \lim_{P \rightarrow P_0} (f \cdot h) = 1 \cdot L_1 = L_1$$

$f \sim g \rightarrow g \sim f$ (SUFFICIENTE
VALIDA
L'IP. DI NON
ANNULLAMENTO)

NEL CASO DI
LIMITI FINITI...

[SI PUÒ ESTENDERE
AL CASO $L_1 \in \mathbb{R}^*$]

VICEVERSA, SE ESISTE $\lim_{P \rightarrow P_0} (g \cdot h) = L_2$ SI HA

$$\lim_{P \rightarrow P_0} (f \cdot h) = \lim_{P \rightarrow P_0} \left(\frac{f}{g} \cdot g \cdot h \right) = \lim_{P \rightarrow P_0} \left(\frac{f}{g} \right) \lim_{P \rightarrow P_0} (g \cdot h) = 1 \cdot L_2 = L_2$$

COME SOPRA

□

ESEMPI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$\sin x \sim x \quad x \sin x \rightarrow x \cdot x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (1 - \cos x) \cdot 1 \rightarrow \left(\frac{1}{2}x^2 \right) \cdot 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \tan x \cdot \sin x}{\tanh x^3} = \left(\begin{array}{l} \sin x \sim x \\ \tan x \sim x \end{array} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x \cdot \sin x}{\tanh x^3} = \left(\sin x \sim x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x \cdot x}{\tanh x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tanh(x^3)} = (t = x^3) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tanh(t)} =$$

$$= (\tanh(t) \sim t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tanh t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sinh t}{t} \right) \cdot \frac{1}{\cosh t}$$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sinh t}{t} = 1$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\cosh t} = 1$
 $\tanh t \sim t \quad (t \rightarrow 0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \tan x)(1 - \cos x)}{x^5} =$$

$$= \left(1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \tan x) \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(1 - \frac{1}{\cos x} \right) \frac{1}{2}}{x^3} =$$

$$= (\sin x \sim x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\frac{\cos x - 1}{\cos x} \right) \frac{1}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{4}$$

OSSERVAZIONE

QUESTA PROP. VIENE SPESSO USATA

MALE, SE IL PRODOTTO NON SI

TROVA DA SOLO, MA È PER ESEMPIO

UN ADDENDO, NON VALE LA
PROPRIETA'

CONTROESEMPIO: VISTO CHE PER $x \rightarrow 0$ $\cos x \sim 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cos x - \sin x}{x^3} \stackrel{?}{=} (\cos x \sim 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$$

SBAGLIATO!

$\tan x \cos x = \sin x$, QUIPOI IL NUMERATORE È
NULLO (E NON INFINITESIMO) E IL RISULTATO
È ZERO.

PROPOSIZIONE SE f E g SONO INFINITESIMI IN P_0

DELLO STESSO ORDINE, ALLORA ESISTONO UN
OPPURE UNO INTORNO I DI P_0 , UNA COSTANTE
 $L \neq 0$, E UN INFINITESIMO IN P_0 , $\sigma(P)$, TALI CHE

$$(*) \quad |f(P)| = L |g(P)| + |g(P)| \sigma(P) \quad \forall P \in I, \{P_0\}$$

E VICEVERSA

DIR. POICHE' $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{|f(P)|}{|g(P)|} = L \neq 0$, BASTA PORRE

$$\sigma(P) = \frac{|f(P)|}{|g(P)|} - L$$

È MOLTIPLICARE PER $|g(p)|$.

PER IL VICEVERSA SI DIVIDE (*) PER $|g(p)|$

□

$$\left[\text{QUINDI } \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{f}{g} = L \neq 0 \iff f(p) = Lg(p) + g(p)\sigma(p) \right. \\ \left. \forall p \in I \setminus \{p_0\} \right]$$

$$\text{OVVERO } \sigma(p) = \frac{f(p)}{g(p)} - L \text{ È INFINITESIMO IN } p_0 \left. \right]$$

OSS. SE $f \succ g (p \rightarrow p_0)$, ALLORA ESISTONO UN
INSORNO I DI p_0 ED UN INFINITESIMO
IN p_0 , $\sigma(p)$, TALI CHE

$$f(p) = g(p)\sigma(p) \quad \forall p \in I \setminus \{p_0\}$$

QUINDI DIRE CHE $\lim_{p \rightarrow p_0} \frac{f}{g} = L$ EQUIVALE A

DIRE CHE $f(p)$ SI PUÒ SCRIVERE COME

SOMMA DI 2 INFINITESIMI, DI CUI UNO È

$Lg(p)$ E L'ALTRO È DI ORDINE SUPERIORE

A $g(p)$

]

DEFINIZIONE PARTE PRINCIPALE

SIANO f E g INFINITESIMI IN P_0 E SIA

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f}{g} = L \neq 0,$$

ALLORA $L \cdot g$ SI DICE PARTE PRINCIPALE DI

f RISPETTO g .

PROP.

SIA $L \cdot g$ LA PARTE PRINCIPALE DI f RISPETTO g ,

ALLORA SI HA:

1) $f \sim g$ ($P \rightarrow P_0$)

2) $f \sim Lg$ ($P \rightarrow P_0$)

3) $f = Lg + g \cdot v$ CON v INFINITESIMO IN P_0

4) f DIFFERISCE DA $L \cdot g$ PER UN INFINITESIMO, $g \cdot v$, DI ORDINE SUPERIORE A f .

LA DIMOSTRAZIONE DI QUESTE PROPRIETA' SI

OTTIENE DALLE CONSIDERAZIONI FATE SOPRA.

ESZMPL

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2 \tan x)}{1 - \cos x}$$

$$= \left(\begin{array}{l} \sin^2(2 \tan x) \sim 4 \tan^2 x \\ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \tan^2 x}{\frac{1}{2} x^2} = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2 \tan x)}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2(2 \tan x)}{(2 \tan x)^2}$$

$$= \left(t = 2 \tan x \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2(t)}{t^2} = 4$$

$$\sin^2(2 \tan x) \sim 4 \tan^2 x$$

$$\left[\sin^2(2 \tan x) = 4 \tan^2 x + \tan(x) o(x) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^2 = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x^7 - \tan x}{\sin x(1 - \cos x) + x^8} = (\text{p.l.s.}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin x - \tan x}^{x^3 < x^7}}{\underbrace{\sin x(1 - \cos x)}_{x \cdot x^2 < x^8}} =$$

$$= \left(\begin{array}{l} \sin x - \tan x \sim -\frac{1}{2} x^3 \\ \sin x \sim x \\ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} x^3}{x \left(\frac{1}{2} x^2 \right)} = -1$$

$$\left[\sin x - \tan x = -\frac{1}{2} x^3 + x^3 o_1(x) \right]$$

$$\left[\sin x = 1 \cdot x + x o_1(x) \right]$$

$$\left[1 - \cos x = \frac{1}{2} x^2 + x^2 o_2(x) \right]$$

$$(*) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} x^3 + x^3 o_1(x)}{(x + x o_1(x)) \left(\frac{1}{2} x^2 + x^2 o_2(x) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} x^3 + x^3 o_1(x)}{\underbrace{\left[x^3 + \frac{1}{2} x^3 o_1(x) \right]}_{\approx x^3} + \underbrace{x^3 o_2(x)}_{\approx x^3} + \underbrace{x^3 o_1(x) o_2(x)}_{\approx x^3}}$$

$$= (\text{p.l.s.}) = -1$$

DEF. "0" O PICCOLO

SIANO f E g DUE FUNZIONI DEFINITE IN UN
INTERNO I DI P_0 , ESCLUSO AL PIU' P_0 , E SIA
 g DIVERSA DA ZERO IN $I \setminus \{P_0\}$.

SE $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = 0$ SI DICE CHE f E'

UN "0 PICCOLO" DI g IN P_0 E SI SCRIVE

$$f \in o(g)$$

[$f \in g$ NON SONO SUPPOSTE INFINITESIME]

TORNIAMO ALL'ESEMPIO

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x^7 - \tan x}{\sin x(1 - \cos x) + x^9} = \text{(P.d.S.)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{\sin x(1 - \cos x)} =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{(x+o(x))\left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = \text{(P.d.S.)} =$$

$$= -\frac{1}{1}$$

$$x \cdot o(x^2) \in o(x^3)$$

$$\frac{1}{2}x^2 \cdot o(x) \in o(x^3) \quad \in o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$$

$$o(x) \cdot o(x^2) \in o(x^3)$$

ESERCIZI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \frac{1}{2}x + x^3}{\tan x - 1 + \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin^2 x + \cos x + x^4 - 1}{x^5 - \tan^4 x + \sin(x^2)}$$