3° LEZIONE 25/02/2021

CORSO MATEMATICA PROF. CARLO FURLANETTO

OSS. SE $\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{(g(P))^m} = L \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$,

ALLORA $f(P)$ HA ORDINE m RISPETTO A $g(P)$.

Dim: $\lim_{P \to P_0} \left| \frac{f(P)}{|g(P)|^m} \right| = \lim_{P \to P_0} \left| \frac{f(P)}{(g(P))^m} \right| = |L| \neq 0$

[QUINDI È OPPORTUNO EVITARE I MODULI QUANDO NON SERVONO]

PROP. SIANO f, g, h INFINITESIMI SIMULTANEI, CON f DI ORDINE α RISPETTO A g E h DI ORDINE β RISPETTO A g,

ALLORA:

SE $\alpha > \beta \to f \dot{>} h$

SE $\alpha = \beta \to f \dot{=} h$

[Quindi l'ordine numerico si conserva se si passa all'ordine degli infinitesimi]

Dim:

$$\underbrace{\lim_{P \to P_0} \frac{|f(P)|}{|g(P)|^{\alpha}} = L_1 \neq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{P \to P_0} \frac{|h(P)|}{|g(P)|^{\beta}} = L_2 \neq 0}_{\text{IPOTESI}}$$

ALLORA
$$\lim_{P \to P_0} \left| \frac{f(P)}{h(P)} \right| = \lim_{P \to P_0} \overbrace{\frac{|f(P)|}{|g(P)|^{\alpha}}}^{L_1} \cdot \frac{|g(P)|^{\alpha}}{|g(P)|^{\beta}} \cdot \overbrace{\frac{|g(P)|^{\beta}}{|h(P)|}}^{1/L_2} =$$

$$= \lim_{P \to P_0} |g(P)|^{\alpha - \beta} \cdot \overset{L_1}{\nearrow} \cdot \overset{1/L_2}{\nearrow} = \begin{cases} \frac{L_1}{L_2} & \text{SE } \alpha = \beta \\ 0 & \text{SE } \alpha > \beta \\ \infty & \text{SE } \alpha < \beta \end{cases}$$

$\square$

PROP. SIANO f_1 E f_2 INFINITESIMI SIMULTANEI; SE $f_2 \overset{i}{>} f_1$, ALLORA $(f_1 + f_2)$ HA LO STESSO ORDINE DI f_1.

Dim:
$$\lim_{P \to P_0} \frac{f_1 + f_2}{f_1} = \lim_{P \to P_0} \left(1 + \overbrace{\frac{f_2}{f_1}}^{\to 0} \right) = 1$$

$\square$

PROP. SE f E g SONO INFINITESIMI SIMULTANEI, ALLORA $f\cdot g \stackrel{i}{>} f$ (E $f\cdot g \stackrel{i}{>} g$)

DIM: $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \left|\frac{f\cdot g}{f}\right| = \lim_{P\to P_0} |g| = 0$ — $\square$

ATTENZIONE: SE f_1 E f_2 SONO INFINITESIMI SIMULTANEI DELLO STESSO ORDINE, f_1+f_2 NON È NECESSARIAMENTE DEL MEDESIMO ORDINE.
(SARÀ DI ORDINE NON INFERIORE ...)

$\tan x \stackrel{i}{=} x$

ES. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$\sin x \sim x + o(x)$

$$\cancel{\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0}$$

$\underbrace{\sin x\sim x}_{}$

SBAGLIATO

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\overset{x}{\stackrel{i}{=}}}{\sin x}-\overset{\overset{x}{\stackrel{i}{=}}}{\tan x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\cos x-1}{x^2}}_{-\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\overset{x}{\stackrel{i}{=}}}{\sin x}+x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\overset{1}{\frac{\sin x}{x}}+\overset{1}{\frac{x}{x}}\right)=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\sim x}{\sin x}-x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\overset{1}{\frac{\sin x}{x}}-\overset{1}{\frac{x}{x}}\right)=0$$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE

TEOREMA. SIANO f_1, f_2, g_1 E g_2 INFINITESIMI SIMULTANEI PER $P \to P_0$ TALI CHE

$$f = f_1 + f_2 \quad \text{E} \quad f_2 \overset{i}{>} f_1$$

$$g = g_1 + g_2 \quad \text{E} \quad g_2 \overset{i}{>} g_1$$

ALLORA $\displaystyle\lim_{P\to P_0}\frac{f}{g} = \lim_{P\to P_0}\frac{f_1}{g_1}$

[SE ESISTE UNO, ALLORA ESISTE ANCHE L'ALTRO, ALTRIMENTI SONO ENTRAMBI NON ESISTENTI]

Dim: $\displaystyle\frac{f}{g} = \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2} = \frac{f_1}{g_1}\,\frac{1+\frac{f_2}{f_1}}{1+\frac{g_2}{g_1}}$

QUINDI SE ESISTE $\displaystyle\lim_{P\to P_0}\frac{f_1}{g_1}$ SI AVRÀ

$$\lim \frac{f}{g} = \lim \left(\frac{f_1}{g_1}\right) \cdot \underbrace{\frac{1 + \frac{f_2}{f_1}}{1 + \frac{g_2}{g_1}}}_{1}{}^{\text{PER IP.}} = \lim \frac{f_1}{g_1}$$

VICEVERSA, SE ESISTE $\lim\limits_{P \to P_0} \frac{f}{g}$, POICHÈ

$$\lim_{P \to P_0} \frac{1 + \frac{f_2}{f_1}}{1 + \frac{g_2}{g_1}} = 1,$$

ALLORA PER T.P.S. ESISTE UN INTORNO DI P_0 IN CUI LA FUNZIONE

$$\frac{1 + \frac{f_2}{f_1}}{1 + \frac{g_2}{g_1}}$$

(POSITIVA) È DIVERSA DA ZERO (ESCLUSO AL PIÙ IN P_0)

IN TALE INTORNO: $\frac{f}{g} \cdot \frac{1 + \frac{g_2}{g_1}}{1 + \frac{f_2}{f_1}} = \frac{f_1}{g_1}$

E QUINDI ... $\lim \frac{f_1}{g_1} = \lim \frac{f}{g}$ —

ESEMPI

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x^3}{\tan x + \operatorname{sen}^2 x}$$

$\operatorname{sen} x \doteq x$ $\quad x^3$ HA ORD. D'INF. 3 RISPETTO

$\tan x \doteq x$ $\quad \operatorname{sen}^2 x \doteq x^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{\cancel{\operatorname{sen} x}} \cdot \cos x = 1$$

$$\left[\lim_{x\to 0} \frac{\left[\overbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}^{1} + \overbrace{x^2}^{0}\right]\cancel{x}}{\left[\underbrace{\frac{\tan x}{x}}_{1} + \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1}\underbrace{\operatorname{sen} x}_{0}\right]\cancel{x}} = 1 \right],$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + x^3}{x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(\overbrace{1 + x^2}^{1})}{\cancel{x}(\underbrace{1+x}_{1})} = 1$$

PERICOLOSO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overset{f_1}{\overset{0}{3x}} + \overset{f_2 + f_1}{\left(\overbrace{\operatorname{sen}^2 x}^{0} + \overbrace{\tan^3 x}^{0}\right)}}{\underbrace{\operatorname{sen} x}_{0} + \underbrace{\operatorname{sh}^2 x}_{0}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{\operatorname{sh} x} = 3$$

1

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{e^x}^{1} - \overbrace{e^{-x}}^{1}}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x^\alpha} = L \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0} e^{-x} \cdot \frac{(e^{2x} - 1)}{2x^\alpha} = 1 \quad \alpha = 1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$\operatorname{sh} x \doteq x \qquad \operatorname{sh}^2 x \doteq x^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x^2 - \tan x}{2\tan^3 x + (e^x - 1)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - \tan x) + x^2}{2\tan^3 x}$$

$$(\sin x - \tan x) \doteq x^3$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2\tan^2 x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x + \tan^3 x}{\sqrt{x} + \sin x + x^2 + \tan^3 x} = \;?$$

PER LA PROSSIMA VOLTA

ASINTOTICITÀ

DEF. SIANO f E g DUE FUNZIONI DEFINITE NELLO STESSO INSIEME $I \subset \mathbb{R}^k$ E SIA P_0 PUNTO D'ACC. PER I. SIA INOLTRE $g(P) \neq 0$ IN UN OPPORTUNO INTORNO DI P_0, ESCLUSO AL PIÙ P_0 STESSO. SE È

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = 1$$

SI DICE CHE f È ASINTOTICA A g IN P_0, E SI SCRIVE $f \sim g \quad (P \to P_0)$.

N.B. SE TUTTE LE FUNZIONI COINVOLTE SONO DIVERSE DA ZERO IN UN INTORNO DI P_0, ESCLUSO AL PIÙ P_0 STESSO VALGONO LE SEGUENTI:

- $f \sim f$
- SE $f \sim g$ ALLORA $g \sim f$
- SE $f \sim g$ E $g \sim h$ ALLORA $f \sim h$.

ESEMPI $[x \to 0]$

$\operatorname{sen} x \sim x$, $\tan x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$

$a^x - 1 \sim x \ln a$

$\operatorname{sh} x \sim x$, $\overset{(*)}{\arctan x \sim x}$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\overset{(**)}{\operatorname{th} x \sim x}$, $\overset{(***)}{\arcsin x \sim x}$

$$\left[\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right]$$

$t = \arctan x \quad x \to 0, t \to 0 \qquad x = \tan(t) = \tan(\arctan x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\tan t} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sh} x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\operatorname{ch} x}}_{1} = 1 \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

$t = \arcsin x, \ x \to 0, t \to 0 \quad x = \sin t$

$\ln(1+x) \sim x$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\overset{1}{\frac{x}{x}} + \overset{0}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} \right) = 1$$

$$x + \operatorname{sen} x \sim x \quad (x \to +\infty)$$

$$x + \operatorname{sen} x \not\sim x \quad (x \to 0)$$

$$x + \operatorname{sen} x \sim 2x \quad (x \to 0)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x + 7)}{x} = \cancel{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln(e^x + 7)^0}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x + 7) - x + x}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x + 7) - \ln(e^x) + x}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{0}{\ln\left(\frac{e^x + 7}{e^x}\right)} + x}{x} = 1$$

$$t = e^x \quad \frac{t + 7}{t} \to 1$$

$$\operatorname{th} x + x^2 \sim x^2 \quad (x \to +\infty) \qquad \frac{1}{x + \cos x} \sim \frac{1}{x} \quad (x \to +\infty)$$

X LA PROSSIMA VOLTA